

面向毫米波网络定向阵列的一种简单有效的近似模型

邓娜¹, 卫海超²

(1. 大连理工大学信息与通信工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连海事大学信息科学技术学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 实际天线方向图的复杂性阻碍了定向天线阵列在大规模网络中的性能研究。因此, 对实际模型进行近似和简化研究, 提出了一种新型的多级平顶模型, 并将其应用于毫米波蜂窝网络中进行性能分析。为了深入研究定向天线阵列特性对用户性能的影响, 采用随机几何理论对毫米波蜂窝网络进行建模, 并基于所提的多级平顶模型推导典型用户的覆盖率及传输速率性能, 包括精确解和上下界的理论表达式。仿真结果显示, 相比于已有模型, 所提模型在近似精确度和理论分析性之间能达到更好的折中。

关键词: 天线方向图近似; 性能分析; 随机几何; 毫米波

中图分类号: TN915.01

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.2096-3750.2018.00079

Tractable yet effective approximation to directional antenna array for millimeter-wave networks

DENG Na¹, WEI Haichao²

1.School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

2.School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China

Abstract: The complexity of the actual antenna pattern imposes restrictions on investigating the benefits of directional antenna arrays in large-scale networks. Hence, a novel multi-level flat-top antenna pattern was proposed to approximate and simplify the actual one and was applied in millimeter-wave cellular networks for performance analysis. To fully characterize the impact of the directional antenna array on the user performance, stochastic geometry was adopted to establish an analytical framework for millimeter-wave cellular networks and derive the coverage probability and transmission rate of the typical user with the proposed multi-level flat-top antenna pattern, including the exact and bounding expressions. The simulation results show that the proposed antenna pattern provides a better tradeoff between the accuracy and tractability than previous patterns.

Key words: antenna pattern approximation, performance analysis, stochastic geometry, millimeter wave

1 引言

为了应对日益增长的移动数据业务以及设备连接数, 将毫米波通信纳入未来通信网络是一项有前景并且有效的使能技术。由于毫米波信道的特性, 即严重的传输损耗和遮挡敏感性, 毫米波通信网络需要大规模天线阵列的方向性波束成形技术

和站点的密集部署, 以达到期望的覆盖性能和传输速率^[1-2]。因此, 毫米波网络中方向性波束成形的建模以及网络的空间分布模型对于网络特性的精确刻画以及性能评估极其重要。

当前, 在进行大规模无线网络的性能评估和理论分析研究时, 国内外学者通常采用随机几何理论作为重要的数学工具, 以便分析网络节点的空间部

收稿日期: 2018-08-09; 修回日期: 2018-10-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61701071); 中国博士后科学基金资助项目 (No.2017M621129); 中央高校基本科研业务基金资助项目 (No.DUT16RC(3)119)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61701071), The China Postdoctoral Science Foundation (No.2017M621129), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (No.DUT16RC(3)119)

署特性及其对网络性能的影响。在毫米波网络研究领域，通常采用平顶方向图模型以简化实际均匀线阵的阵列方向图，从而便于得到可分析的理论结果^[3-6]。虽然网络节点的空间分布可以被随机几何理论的空间点过程精确建模，但是过于简化的阵列方向图模型在性能评估中引入了巨大偏差^[7]，而且在异构阵列共存的网络中将导致更严重的性能误差^[8]。为了克服平顶模型的限制性，Renzo 教授^[9]提出了一个多波瓣近似模型作为平顶模型的扩展以近似实际阵列方向图。虽然这种扩展模型带来了更高的近似精确度，但该模型的主波瓣方向增益参数低于实际模型，且旁瓣增益近似严重失配，使得有用信号强度和旁瓣干扰与实际系统存在较大差异，导致网络性能评估产生偏差^[10]。此外，由于多波瓣模型的参数通过解决一个带有约束条件的非线性优化问题获得，模型参数的确认过程将存在复杂和不稳定的问题，而且模型参数与阵列大小无法建立显示表达关系式，从而限制了该模型在网络性能分析中的进一步应用。以上两种近似模型在可分析性的角度上相对于实际模型具有巨大优势，但近似精确度却与实际相差甚远。在精确度方面，文献[7]提出的 Sinc 和 Cosine 两种近似模型以及文献[10]提出的 Multi-cosine 近似模型为实际模型提供了良好的近似，同时在可分析性上也优于实际模型。然而，基于以上 3 个模型进行的性能分析结果依然过于复杂，同时，在可分析性上也比平顶和多波瓣模型差。

为了达到在可分析性和近似精确度之间的良好折中，本文为均匀线阵提出一种新型的阵列方向图近似模型，即多级平顶模型，其中模型参数由任意阵列大小的实际方向图函数直接获取。通过对实际方向图的每个波瓣（包括主瓣和旁瓣）采用常数增益以及半功率波束带宽进行刻画，该模型具有与多波瓣模型相同的理论分析性，但可以提供更高的近似精确度。基于所提模型，本文采用随机几何理论推导了毫米波蜂窝网络中用户覆盖率和传输速率的理论表达式。此外，为了简化性能评估的复杂度，推导了用户覆盖率的上下界，并且通过渐近分析方法理论验证上界的近似有效性。仿真结果在方向图、覆盖率和传输速率性能上，体现所提方向图模型的近似精确度和有效性。

2 系统模型

2.1 天线方向图

由于天线方向图在网络性能评估和分析中具

有重要作用，考虑均匀线性阵列，基于目前已有的天线方向图模型讨论在精确性和理论分析性两方面所体现的特性，包括实际方向图、平顶和多波瓣方向图模型等。之后，在已有模型的基础上，提出一种新型的近似模型以期在精确性和理论分析性上达到良好折中。

1) 实际方向图模型

对于均匀线性阵列，其实际方向图的增益函数可以表示为^[7]

$$G_{\text{act}}(\varphi) = \frac{\sin^2(\pi N \varphi)}{N \sin^2(\pi \varphi)} \quad (1)$$

其中， N 是天线阵列的阵子个数； $\varphi = d_i \cos \theta / \rho$ 对应物理发射角（AoD, angle of departure）的方向余弦，称为空间 AoD； d_i 和 ρ 分别表示天线阵子实际间距和信号波长。一般设置 d_i 为半波长，因此可得 $\varphi \in [-0.5, 0.5]$ 。由式(1)可知，空间 AoD 对于天线方向图呈现偶对称性，因此仅需对非负 $\varphi \geq 0$ 加以分析即可。实际天线方向图包含 $\lfloor N/2 \rfloor - 1$ 个旁瓣，其中旁瓣宽度为 $1/N$ 。当 $\varphi \geq 0$ 时，各旁瓣中最大增益可以近似在式(1)分子达最大值时取得。实际天线方向图的分子和分母是三角函数，限制了该实际模型在性能分析和评估上的可分析性，同时，这种理论分析的难度在大规模网络场景中体现得尤为明显。因此，国内外学者通常提出一些简化的近似模型以便于理论分析。

2) 平顶和多波瓣方向图模型

平顶模型假设在半功率波束宽度（HPBW, half-power beamwidth）内的增益是实际方向图所能达到的最大增益，其他方向对应的增益近似为实际方向图的第一旁瓣所能达到的增益，具体的天线阵列增益函数为

$$G_{\text{flat}}(\varphi) = \begin{cases} G_m & , \text{ 若 } |\varphi| \leq \psi \\ G_s & , \text{ 其他} \end{cases} \quad (2)$$

其中， ψ 是半功率波束宽度，即 $G_{\text{act}}(\psi) = N/2$ 、 $G_m = N$ 以及 $G_s = G_{\text{act}}(3/2N)$ 。另一种常用的归一化平顶模型则需要调整旁瓣增益使得天线增益函数在空间 AoD 上的积分为 1，即 $G_s = (1 - 2\psi G_m) / (1 - 2\psi)$ 。虽然这种相对简单的方向图模型具有足够的理论可分析性，但基于该模型所得的性能分析与实际性能存在较大偏差，原因在于该模型对于连续变化的天线阵列增益仅进行简单的二进制量化。基于上述原因，文献[9]提出一种多波瓣天线模型，具体可以表示为

$$G_{\text{multi}}(\varphi) = \sum_{l=1}^M G_l I_{\varphi \in [\psi^{(l-1)}, \psi^{(l)}]} \quad (3)$$

其中, I 是示性函数, M 是模型所需的波瓣个数, G_l 是第 l 个波瓣的增益, $\psi^{(0)} = 0 < \psi^{(1)} < \dots < \psi^{(M-1)} < \psi^{(M)} = 0.5$ 是与各波瓣相关的空间 AoD, 且满足 $\int_{-0.5}^{0.5} G_{\text{multi}}(\varphi) d\varphi = 1$. 波瓣数 M 由经验所得, 其中文献[9]建议 5 个波瓣即可达到精确度与复杂度之间的良好折中, 同时, 该模型的其他参数可以通过解决以下最小化问题得到

$$\arg \min_{G_l, \psi^{(l)}} \|\log(G_{\text{multi}}(\varphi)) - \log(G_{\text{act}}(\varphi))\|_F^2 \quad (4)$$

其中, $\|\cdot\|_F^2$ 表示 Frobenius 范数。由于采用多进制量化方法, 多波瓣近似模型比平顶模型具有精确度更高的优势, 但依然保持相同的可分析性。然而, 该模型的参数无法显示得到, 且其所得的性能与阵列大小没有直接关系。式(4)中约束优化问题的解与初始值设定极其相关, 并且易收敛到一个局部优化解, 这种不稳定性会随着阵列大小的增加变得更严重。此外, 多波瓣模型的最大增益通常小于实际方向图的最大增益, 则会造成有用信号强度的偏差。因此, 该近似模型会导致性能偏差, 同时模型参数确认的复杂性和不稳定性会限制进一步的理论分析。

3) 多级平顶方向图模型

受启发于平顶模型的近似方式, 即主瓣的特性由一个常数增益和半功率波束带宽进行表征近似, 旁瓣同样可以采用类似的近似方式。由于各旁瓣波束宽度均相同且等于主瓣波束宽度的一半, 则各旁瓣的半功率波束带宽也是主瓣的一半。因此, 本文提出一个多级平顶天线方向图模型来近似实际方向图。在模型具体定义前, 先给出一些符号以便后续说明。令 $K = \lfloor N/2 \rfloor$, $\varphi_k = \frac{2k-1}{2N}$, $k \in [K]$, $[K] = \{1, 2, \dots, K\}$ 。当 $k \geq 2$ 时, 各旁瓣空间 AoD 的边界为 φ_k 。多级平顶方向图模型定义为

$$G(\varphi) = \begin{cases} G_k, & \text{若 } \varphi_k - \frac{\psi}{2} \leq |\varphi| < \varphi_k + \frac{\psi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $G_1 = N$, $\varphi_1 = \frac{\psi}{2}$ 和 $G_k = G_{\text{act}}(\varphi_k)$, 且 $k \geq 2$ 。

4 种不同天线方向图对比如图 1 所示, 比较多级平顶、归一化平顶、多波瓣及实际天线方向图, 其中, $N = 32$ 。从结果上看, 多级平顶模型比多波瓣模型

更贴近实际方向图, 即近似精确度更高, 原因在于多级平顶模型在主瓣和各旁瓣均采用平顶近似方法。此外, 多级平顶模型各参数与阵列大小 N 之间存在显示的表达式, 相比于多波瓣模型的隐式关系在模型参数确认中更具优势。相比于多级平顶模型, 平顶模型在主瓣上具有相同的近似精确度, 但在旁瓣上与实际模型存在较大偏差。多波瓣模型在主瓣上采用了两个波瓣近似, 因此具有更好的近似程度, 但是在各旁瓣上近似不准确。

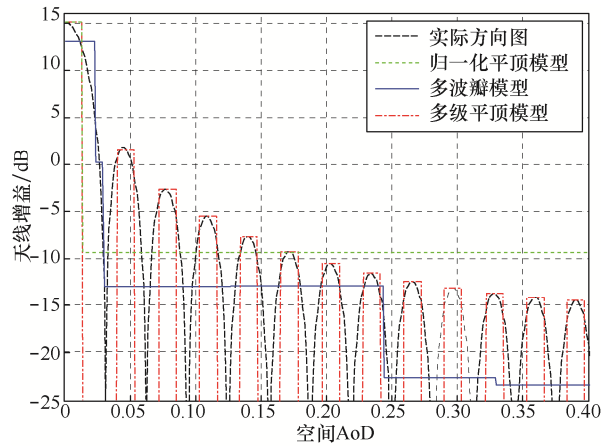


图 1 4 种不同天线方向图对比

为了全面刻画不同天线方向图的特性, 表 1 在近似精确度、可分析性以及模型参数确认 3 个方面进行比较。由于 Sinc、Cosine 以及 Multi-cosine 近似方向图模型函数仅在分子存在三角函数, 因此, 这 3 种模型比实际模型的可分析性强, 同时近似精确度损失较小, 但由于存在三角函数, 使得模型在可分析性方面依然较差。从文献[7]和[10]的理论结果来看, 需要对三角函数进行一次多项式无穷级数展开去除积分操作。多级平顶、平顶以及多波瓣方向图模型参数均是线性函数, 从而提升了模型的可分析性。然而, 由于采用矩形函数来近似实际中连续变化的波束增益函数, 近似的精确度损失较大。因此, 模型的近似需要在可分析性和近似精确度之间进行权衡, 以达到两者的折中。相对于已有模型, 本文所提的多级平顶模型可以达到最好的折中, 且相关模型参数可以直接通过实际方向图函数进行显示地确定。

2.2 网络模型

为了进一步研究天线方向图, 考虑分析毫米波蜂窝网络中的下行覆盖性能, 其中, 基站的空间分布假设服从密度为 λ 齐次泊松点过程 (PPP) $\hat{\Phi}$, 且用户由最近的基站进行服务。用户的空间分布假

表 1 不同近似天线方向图模型对比

	多级平顶	平顶 ^[5]	多波瓣 ^[9]	Sinc ^[7]	Cosine ^[7]	Multi-cosine ^[10]
精确度	高	低	中	高	中	高
可分析性	高	高	高	低	中	中
参数确认	显示	显示	隐示	显示	显示	显示

设服从密度为 λ_u 的齐次 PPP Φ_u 。由于 PPP 的空间平稳性, 通过分析位于原点的典型用户可以反映不同用户的性能。假设每个基站配有阵子数为 N 的均匀线性阵列, 且每个用户仅使用单根天线。所有基站的发射功率是 μ , 且采用基于理想波束对准的模拟波束成形技术与用户通信。为了体现毫米波通信的特性, 采用一般性的 LOS (line of sight) 球模型对遮挡效应进行建模^[11]。具体来说, 对于距离为 d 的两个通信节点之间信道的 LOS 概率表示为

$$P_{\text{LOS}}(d) = p_L 1_{d < R} \quad (6)$$

其中, R 是 LOS 信道的最大距离, LOS 为比例常数, $p_L \in [0, 1]$ 是在一个半径为 R 的圆内的 LOS 区域的比例。遮挡效应使得 LOS 和 NLOS 信道引入不同的路损指数, 分别表示为 α_L 和 α_N 。对于干扰节点 $x \in \hat{\Phi}$ 到典型用户的路损函数表示为

$$\ell(x) = \begin{cases} (\max\{d_0, |x|\})^{-\alpha_L} & \text{w.p. } P_{\text{LOS}}(|x|) \\ (\max\{d_0, |x|\})^{-\alpha_N} & \text{w.p. } 1 - P_{\text{LOS}}(|x|) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\ell(x)_{x \in \hat{\Phi}}$ 是互相独立的。假设服务基站和典型用户之间的有用信号链路处于 LOS 状态。该假设的原因在于若用户接入一个 NLOS 基站, 则通信链路由于严重信号传播损失、毫米波带宽下的高噪声功率以及干扰的影响而大概率处于中断状态。此外, 本文所得的理论分析可以直接扩展到有用信号链路是一般情况下的场景。除了路损函数之外, 考虑通过 Nakagami 衰落模型以刻画信道中的小尺度衰落, 且 LOS 和 NLOS 信道衰落的参数分别为 M_L 和 M_N , 并假设均为正整数。用 h_x 表示节点到典型用户的路损系数, 服从 Gamma 分布 $\text{Gamma}(M, 1/M)$, 且 $M \in \{M_L, M_N\}$, 同时假设所有 $x \in \hat{\Phi}$ 的 h_x 互相独立。

2.3 信干噪比分析

由于存在遮挡效应, LOS 球以外的干扰源到典型用户均历经 NLOS 信道, 而远距离 (至少大于 R) 的严重路损使得用户可以忽略 LOS 球以外的干扰信号^[1]。因此, 典型用户的覆盖性能分析主要聚焦于有限的网络区域, 则该区域的基站集合表示为

Φ , 对应以原点为中心、半径为 R 的圆内分布的 PPP, 即 $\Phi = \hat{\Phi} \cap b(o, R)$, 其中, $b(o, R)$ 是以原点为中心、半径为 R 的圆盘区域。所有在 LOS 球里的基站可以分为两类, 其中, 历经 LOS 信道的基站组成一个密度为 $\lambda_L = p_L \lambda$ 的 PPP Φ_L , 而历经 NLOS 信道的基站组成一个密度为 $p_N \lambda$ 的 PPP Φ_N , 且 $p_L + p_N = 1$ 以及 $\Phi = \Phi_L \cup \Phi_N$ 。不失一般性, 噪声功率设置为 1, 则典型用户的信干噪比 (SINR) 表示为

$$\text{SINR} \triangleq \frac{\mu N h_{x_0} r_0^{-\alpha_L}}{1 + I} \quad (8)$$

其中, x_0 表示距离典型用户最近的服务基站, 且 $r_0 = |x_0|$, $I = \sum_{x \in \Phi \setminus \{x_0\}} \mu G(\varphi_x) h_x \ell(x)$ 表示典型用户接收的总干扰信号强度, $G(\varphi_x)$ 是干扰基站 x 到典型用户的阵列增益, 具体表达式为式(5)。如文献[7]所证明, 干扰源 x 到典型用户的空间 AoD φ_x 服从在 $[-0.5, 0.5]$ 的均匀分布。

3 性能分析

首先给出基于多级平顶模型下覆盖率的精确结果。随后为简化分析, 本文给出易于计算的覆盖率上下界, 并通过渐近分析给出上下界的精确性。最后基于覆盖率结果, 给出用户的传输速率。

3.1 覆盖率

覆盖率定义为典型用户的 SINR 的互补累积分布函数, 表示为

$$P(\theta) = \mathbb{P}(\text{SINR} > \theta) \quad (9)$$

其中, θ 是目标 SINR 阈值。该覆盖率表示典型用户的 SINR 能达到目标阈值的概率, 也可解释为在任意时间、任意 PPP 实现时能达到的目标阈值的用户比例。如 2.2 节所说明, 有用信号链路历经 LOS 信道的假设可以直接扩展到一般情况, 即有用信号链路可以为 LOS 或 NLOS 信道。因为若给定有用信号是 NLOS 信道, 对应理论分析方法与本文所考虑的 LOS 情况一致。此时, 一般情况下的覆盖率性能通过全概率计算式可得, 即

$$P(\theta) = P_L(\theta)\mathbb{P}(x_0 \in \Phi_L) + P_N(\theta)\mathbb{P}(x_0 \in \Phi_N) \quad (10)$$

其中, P_L 和 P_N 分别是在有用信号链路为 LOS 或 NLOS 条件下的覆盖率。为了简化分析, 本文仅考虑有用信号链路历经 LOS 信道的场景。以下定理给出毫米波蜂窝网络下覆盖率的精确表达式。

定理 1 令 $\epsilon = \frac{M_L}{\mu N}$, 典型用户的覆盖率表达式为

$$P(\theta) = \lambda \pi \sum_{m=0}^{M_L-1} \int_0^{R^2} e^{-\lambda \pi r} \frac{(-u)^m}{m!} \mathcal{L}^{(m)}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=\theta \epsilon r^{\alpha_L/2}} \mathrm{d}r \quad (11)$$

其中, $\mathcal{L}(r, u) = \exp(\eta(r, u))$ 是干扰与噪声之和的条件拉式变换, 上标“(m)”表示 $\mathcal{L}(r, u)$ 关于 u 的 m 阶导数, 以及

$$\eta(r, u) = -u + \sum_{s \in \{L, N\}} 4\pi p_s \psi \lambda \sum_{z=1}^{\infty} A_s(r, z) u^z \quad (12)$$

其中

$$A_s(r, z) = \binom{M_s + z - 1}{z} \left(-\frac{\mu}{M_s}\right)^z D_s(z, r, d_0) \sum_{k=1}^K G_k^z \quad (13)$$

$$D_s(z, r, d_0) = \begin{cases} \frac{r^{2-\alpha_s z} - R^{2-\alpha_s z}}{\alpha_s z - 2}, & \text{若 } r \geq d_0 \\ \frac{r^2 d_0^{-\alpha_s z}}{2} + \frac{\alpha_s z d_0^{2-\alpha_s z} - 2R^{2-\alpha_s z}}{2(\alpha_s z - 2)}, & \text{若 } r < d_0 \end{cases} \quad (14)$$

$\mathcal{L}^{(m)}(r, u)$ 可以递归表示为

$$\mathcal{L}^{(m)}(r, u) = \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \eta^{(m-n)}(r, u) \mathcal{L}^{(n)}(r, u) \quad (15)$$

其中, $\eta(r, u)$ 关于 u 的 n 阶导数表示为

$$\eta^{(n)}(r, u) = -\mathbf{1}_{n=1} + \sum_{s \in \{L, N\}} 4\pi p_s \psi \lambda \sum_{z=n}^{\infty} \frac{\Gamma(z+1) A_s(r, z) u^{z-n}}{\Gamma(z-n+1)} \quad (16)$$

证明: 覆盖率 $P(\theta)$ 表示为

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \mathbb{P}\left(\frac{\mu N h_{x_0} r_0^{-\alpha_L}}{1+I} > \theta\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\tilde{\Gamma}(M_L, \theta \epsilon r_0^{\alpha_L} (1+I))\right] \\ &= \sum_{m=0}^{M_L-1} \mathbb{E}\left[e^{-\theta \epsilon r_0^{\alpha_L} (1+I)} \frac{(\theta \epsilon r_0^{\alpha_L} (1+I))^m}{m!}\right] \\ &= \sum_{m=0}^{M_L-1} \int_0^R f_0(r) \frac{(-u)^m}{m!} \mathcal{L}^{(m)}(r, u) \Big|_{u=\theta \epsilon r^{\alpha_L}} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{M_L-1} \int_0^R 2\lambda \pi r e^{-\lambda \pi r^2} \frac{(-u)^m}{m!} \mathcal{L}^{(m)}(r, u) \Big|_{u=\theta \epsilon r^{\alpha_L}} \mathrm{d}r \\ &= \sum_{m=0}^{M_L-1} \int_0^{R^2} \lambda \pi e^{-\lambda \pi r} \frac{(-u)^m}{m!} \mathcal{L}^{(m)}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=\theta \epsilon r^{\alpha_L/2}} \mathrm{d}r \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\tilde{\Gamma}(M_L, \theta \epsilon r_0^{\alpha_L} (1+I))$ 是归一化的不完全 Gamma 函数, $f_0(r) = 2\lambda \pi r e^{-\lambda \pi r^2}$ 是典型用户到其服务基站距离的概率密度函数 (PDF) [12], $\mathcal{L}(r, u) = \mathbb{E}[e^{-u(I+1)}]$ 是最近干扰源在距离 r 之外的条件下干扰与噪声之和的拉式变换, 且上标“(m)”表示 $\mathcal{L}(r, u)$ 关于 u 的 m 阶导数。由于典型用户的干扰来自 LOS 和 NLOS 的干扰源, 则可推导得

$$\mathcal{L}(r, u) = e^{-u} \prod_{s \in \{L, N\}} \mathbb{E}_{I_s} e^{-u I_s} = e^{-u} \prod_{s \in \{L, N\}} \mathcal{L}_{I_s}(r, u) \quad (18)$$

其中, $\mathcal{L}_{I_s}(r, u)$ 表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_s}(r, u) &= \mathbb{E}\left[\prod_{x \in \Phi_s} \left(\frac{1}{1 + \frac{u \mu G(\varphi_x) \ell_s(x)}{M_s}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\Phi_s} \left[\prod_{x \in \Phi_s} \left(\sum_{k=1}^K \frac{2\psi}{1 + \frac{u \mu G_k \ell_s(x)}{M_s}} + 1 - 2K\psi \right) \right] \\ &= \exp\left(-4\pi p_s \psi \lambda \sum_{k=1}^K \int_r^R \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{u \mu G_k \ell_s(y)}{M_s}}\right)}_{\mathcal{X}} \mathrm{d}y\right) \end{aligned} \quad (19)$$

其中, 式(19)通过 PPP 的概率生成函数 (PGFL) [13] 推导, 积分下限是因为最近干扰源在距离 r 以外。对于式(19)的去积分操作, 可以通过一般化的二项式定理对 \mathcal{X} 进行级数展开, 可推导得

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= -\sum_{z=1}^{\infty} \binom{M_s + z - 1}{z} \left(-\frac{u \mu G_k}{M_s}\right)^z \int_r^R \ell_s^z(y) \mathrm{d}y \\ &= -\sum_{z=1}^{\infty} u^z \binom{M_s + z - 1}{z} \left(-\frac{\mu G_k}{M_s}\right)^z D_s(z, r, d_0) \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$D_s(z, r, d_0) = \begin{cases} \frac{r^{2-\alpha_s z} - R^{2-\alpha_s z}}{\alpha_s z - 2}, & \text{若 } r \geq d_0 \\ \frac{r^2 d_0^{-\alpha_s z}}{2} + \frac{\alpha_s z d_0^{2-\alpha_s z} - 2R^{2-\alpha_s z}}{2(\alpha_s z - 2)}, & \text{若 } r < d_0 \end{cases} \quad (21)$$

令

$$A_s(r, z) = \binom{M_s + z - 1}{z} \left(-\frac{\mu}{M_s}\right)^z D_s(z, r, d_0) \sum_{k=1}^K G_k^z \quad (22)$$

$$\eta(r, u) = -u + \sum_{s \in \{L, N\}} 4\pi p_s \psi \lambda \sum_{z=1}^{\infty} A_s(r, z) u^z \quad (23)$$

可以得到 $\mathcal{L}(r, u) = \exp(\eta(r, u))$ 。由于 $\mathcal{L}^{(1)}(r, u) = \eta^{(1)}(r, u)\mathcal{L}(r, u)$ ，根据莱布尼茨公式，可递推得出 $\mathcal{L}^{(m)}(r, u)$

$$\mathcal{L}^{(m)}(r, u) = \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \eta^{(m-n)}(r, u) \mathcal{L}^{(n)}(r, u) \quad (24)$$

其中， $\eta(r, u)$ 关于 u 的阶导数表示为

$$\eta^{(n)}(r, u) = -I_{n-1} + \sum_{s \in \{L, N\}} 4\pi p_s \psi \lambda \sum_{z=n}^{\infty} \frac{\Gamma(z+1) A_s(r, z) u^{z-n}}{\Gamma(z-n+1)} \quad (25)$$

在毫米波信道中，较为实际的 Nakagami 衰落信道模型使性能的理论分析复杂化，而且计算覆盖率则需计算干扰拉式变换的高阶导数，其中，导数的最高阶数取决于 LOS 信道的 Nakagami 衰落参数 M_L 。由于覆盖率精确结果的复杂性，因此有必要求取其有效近似或紧密界限以便评估性能。

3.2 覆盖率的上下界和渐近分析

虽然总干扰的拉氏变换可以通过数值积分的方法得到，但对应的不同阶导数需要更复杂的计算，因此，本文给出更容易计算和评估的覆盖率上下界。

定理 2 令 $\beta = [\Gamma(1 + M_L)]^{-1/M_L}$ 以及

$$\hat{P}(\theta) = \pi \lambda \sum_{m=1}^{M_L} \binom{M_L}{m} (-1)^{m+1} \int_0^{R^2} e^{-\lambda \pi r} \mathcal{L}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=m\theta\beta\epsilon r^{\alpha_L/2}} \mathrm{d}r \quad (26)$$

对于泊松毫米波蜂窝网络， $\hat{P}(\theta)$ 是覆盖率 $P(\theta)$ 的上界，同时， $P(\theta)$ 的下界通过将 $\hat{P}(\theta)$ 中的 β 设置为 1，即

$$\tilde{P}(\theta) = \pi \lambda \sum_{m=1}^{M_L} \binom{M_L}{m} (-1)^{m+1} \int_0^{R^2} e^{-\lambda \pi r} \mathcal{L}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=m\theta\epsilon r^{\alpha_L/2}} \mathrm{d}r \quad (27)$$

证明：从文献[14]可知如下不等式

$$1 - [1 - \exp(-x)]^M \leq \tilde{\Gamma}(M, x) \leq 1 - [1 - \exp(-\beta x)]^M \quad (28)$$

其中， $\beta = [\Gamma(1 + M)]^{-1/M}$ ， $\tilde{\Gamma}(M, x) = \Gamma(M, x) / \Gamma(M)$ ，覆盖率 $P(\theta)$ 的上界可以推导得

$$\hat{P}(\theta) = 1 - \mathbb{E} \left[\left(1 - \exp(-\theta\beta\epsilon r^{\alpha_L} (1+I)) \right)^{M_L} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{M_L} \binom{M_L}{m} (-1)^{m+1} \mathbb{E} \left[\exp(-m\theta\beta\epsilon r^{\alpha_L} (1+I)) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{M_L} \binom{M_L}{m} (-1)^{m+1} \int_0^R 2\pi\lambda r e^{-\lambda\pi r^2} \mathcal{L}(r, u) \Big|_{u=m\theta\beta\epsilon r^{\alpha_L}} \mathrm{d}r \quad (29) \\ &= \sum_{m=1}^{M_L} \binom{M_L}{m} (-1)^{m+1} \int_0^{R^2} \pi\lambda e^{-\lambda\pi r} \mathcal{L}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=m\theta\beta\epsilon r^{\alpha_L/2}} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

将干扰与噪声之和的拉式变换 $\mathcal{L}(r, u)$ 带入式(29)，可以得到覆盖率的上界。类似地，根据式(28)的左不等式，设置 $\hat{P}(\theta)$ 中的 β 为 1 时，可以得到覆盖率的下界。

由覆盖率上下界的表达式可知，上下界具有 $\hat{P}(\theta) = \tilde{P}(\beta\theta)$ 的理论关系式，即上下界存在一个与 SINR 阈值无关的比例系数 β 。一般在求取覆盖率曲线时，SINR 阈值通常以 dB 形式出现。因此，当 θ 以 dB 形式出现时，可以得到 $\hat{P}(\theta) = \tilde{P}(10 \log_{10}(\beta) + \theta)$ ，即该比例系数反映的是一个横向偏移，与通信系统中的编码增益相类似。在计算复杂度上，该上下界不需要计算干扰拉式变换的导数，从而明显降低覆盖率的运算复杂度。然而，对于上下界相对于精确解的紧密程度，仍需要深入研究以得到上下界的有效性。由于表达式的复杂性，难以直接得到精确解与上下界的差距，本文采用各自表达式在 $\theta \rightarrow 0$ 时的渐近特性来验证上下界的有效性。下述推论结果首先给出精确解在 $\theta \rightarrow 0$ 时的渐近特性。

推论 1 覆盖率 $P(\theta)$ 的渐近特性为

$$P(\theta) \sim 1 - \frac{\pi\lambda(-\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \int_0^{R^2} e^{-\lambda\pi r} r^{M_L\alpha_L} \mathcal{L}^{(M_L)}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=0} \mathrm{d}r, \theta \rightarrow 0 \quad (30)$$

证明：对于覆盖率 $P(\theta)$ ，可推导如下

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \mathbb{P} \left(\frac{\mu N h_{x_0} r_0^{-\alpha_L}}{1+I} > \theta \right) \\ &= 1 - \mathbb{E} \left[\tilde{\gamma} \left(M_L, \theta \epsilon r_0^{\alpha_L} (1+I) \right) \right] \\ &\sim 1 - \frac{1}{\Gamma(M_L) M_L} \mathbb{E} \left[\left(\theta \epsilon r_0^{\alpha_L} (1+I) \right)^{M_L} \right], \theta \rightarrow 0 \\ &\sim 1 - \frac{(\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \mathbb{E} \left[r_0^{M_L\alpha_L} (1+I)^{M_L} \right], \theta \rightarrow 0 \\ &\sim 1 - \frac{2\pi\lambda(-\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \int_0^R e^{-\lambda\pi r^2} r^{M_L\alpha_L+1} \mathcal{L}^{(M_L)}(r, u) \Big|_{u=0} \mathrm{d}r, \theta \rightarrow 0 \\ &\sim 1 - \frac{\pi\lambda(-\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \int_0^{R^2} e^{-\lambda\pi r} r^{M_L\alpha_L} \mathcal{L}^{(M_L)}(\sqrt{r}, u) \Big|_{u=0} \mathrm{d}r, \theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\tilde{\gamma}(x, y) = 1 - \Gamma(x, y) / \Gamma(x)$ 以及 $\mathbb{E}[(1+I)^{M_L}] = (-1)^{M_L} \mathcal{L}^{(M_L)}(r, u)|_{u=0}$ 。

其次, 给出覆盖率的上下界结果在 $\theta \rightarrow 0$ 时的渐近特性。

推论 2 覆盖率 $P(\theta)$ 上下界的渐近特性为

$$\begin{aligned} \hat{P}(\theta) &\sim 1 - \frac{\pi\lambda(-\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \int_0^{R^2} e^{-\lambda\pi r} r^{M_L\alpha_L} \mathcal{L}^{(M_L)}(\sqrt{r}, u)|_{u=0} dr, \theta \rightarrow 0 \\ \tilde{P}(\theta) &\sim 1 - \frac{\pi\lambda(-\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \int_0^{R^2} e^{-\lambda\pi r} r^{M_L\alpha_L} \mathcal{L}^{(M_L)}(\sqrt{r}, u)|_{u=0} dr, \theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (32)$$

证明: 对于覆盖率上界 $\hat{P}(\theta)$, 可推导如下

$$\begin{aligned} \hat{P}(\theta) &= 1 - \mathbb{E}[(1 - \exp(-\theta\beta\epsilon r_0^{\alpha_L}(1+I)))^{M_L}] \\ &\sim 1 - \mathbb{E}[(\theta\beta\epsilon r_0^{\alpha_L}(1+I))^{M_L}], \theta \rightarrow 0 \\ &\sim 1 - \frac{(\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \mathbb{E}[r_0^{M_L\alpha_L}(1+I)^{M_L}], \theta \rightarrow 0 \\ &\sim 1 - \frac{\pi\lambda(-\theta\epsilon)^{M_L}}{\Gamma(M_L+1)} \int_0^{R^2} e^{-\lambda\pi r} r^{M_L\alpha_L} \mathcal{L}^{(M_L)}(\sqrt{r}, u)|_{u=0} dr, \theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (33)$$

类似地, 可以得到下界的渐近特性。

从推论 1 和推论 2 的结果来看, 覆盖率的精确结果与上界具有相同的渐近特性, 即 $P(\theta) \sim \hat{P}(\theta), \theta \rightarrow 0$, 因此, 覆盖率的上界可以作为一个有效的近似结果。至于下界 $\tilde{P}(\theta)$, 可以得到 $P(\theta) \sim \tilde{P}(\beta\theta)$ 。此外, $\log(1 - P(\theta))$ 和 $\log(1 - \hat{P}(\theta))$ 的渐近斜率则为 LOS 信道的 Nakagami 衰落参数 M_L 。对于相同的 M_L , 不同阵列大小的覆盖率通过横向偏移得到, 即 $P_{N_1}(\theta/\xi(N_1)) \sim P_{N_2}(\theta/\xi(N_2))$, 其中

$$\xi(N) = \frac{M_L^{M_L}}{(\mu N)^{M_L} \Gamma(M_L+1)} \mathbb{E}[r_0^{M_L\alpha_L}(1+I)^{M_L}] \quad (34)$$

3.3 用户传输速率

由于用户和基站均服从齐次 PPP, 可得单个基站平均服务 λ_u/λ 个用户。假设基站采用等资源的分配方式对用户进行服务, 毫米波通信系统的带宽为 W , 则被同一个基站所服务的用户可以获得的频谱资源为 $W\lambda/\lambda_u$ 。一般而言, 毫米波通信的带宽远大于传统的低频通信带宽, 因此, 毫米波用户可以获得相对较高的通信速率。基于 SINR 阈值的固定

传输速率模型^[15], 可以得到单用户传输速率为

$$\tau = \frac{\lambda}{\lambda_u} WP(\theta) \log_2(1 + \theta) \quad (35)$$

通过代入覆盖率的上下界, 可以推导出用户速率的上下界。

4 数值仿真

本节给出毫米蜂窝网络下采用多级平顶方向图模型的覆盖率数值仿真结果, 其中, 默认的系统参数为 $\lambda = 2 \times 10^{-3}$, $\mu = 100$, $p_L = 0.5$, $R = 300$, $M_L = 4$, $M_N = 2$, $\alpha_L = 2.5$, $\alpha_N = 4$, $d_0 = 1$, $W = 2$ GHz, $\lambda_u = 20\lambda$ 。数值结果通过理论公式计算得到, 而仿真结果通过 10^6 次仿真实现得到。

不同天线模型的覆盖率对比如图 2 所示, 比较了 3 种天线阵列模型在不同密度和阵列大小情况下的覆盖率性能。从图 2 可以看出, 相较于多波瓣模型, 不同情况下所提的多级平顶模型在覆盖率性能上更精确。覆盖率精确解及其上界都能够为实际方向图下的覆盖率曲线提供较好的近似效果, 然而多波瓣模型所得的覆盖率要低于实际值 (1~2 dB 的横向偏差), 且偏差会随着阵列的增大而增大。覆盖率的下界与实际覆盖率呈现接近固定的横向偏差, 该偏差与阵列的大小和密度无关。通过理论分析可知, 上界与下界存在 $\beta = [\Gamma(1 + M_L)]^{-1/M_L}$ 的横向偏差, 仅与 Nakagami 衰减信道参数 M_L 有关, 因此, 图 2 中所呈现的现象与理论分析一致。

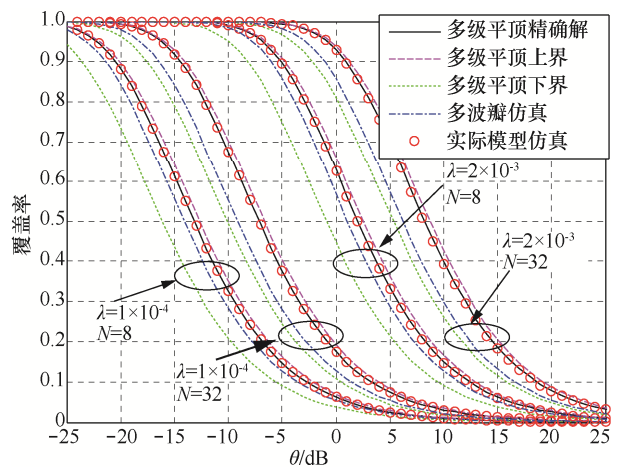


图 2 不同天线模型的覆盖率对比

不同密度的覆盖率性能如图 3 所示, 图 3 给出了采用多级平顶模型时不同基站密度对覆盖率性能的影响。随着密度增大, 用户的覆盖率性能提升。

这是因为密度越大使得用户距离其服务基站越近，则用户收到有用信号的强度越大，因此覆盖率也会随之提升。此外，从图 3 可以看出，用户覆盖率的提升速率与所选取的 SINR 阈值有关。当 SINR 阈值为 -10 dB 时，覆盖率随着密度的提升迅速趋于 1；而当 SINR 阈值为 10 dB 时，覆盖率随密度的提升速率低于前者。该现象说明，对于服务质量需求较高的用户（即较高的 SINR 阈值），仅采用基站密集化是难以满足的，因为部署更多的毫米波基站对应更大的成本投入，而运营商难以无限制地通过密集化基站去满足用户需求，因此仍需引入干扰协调、避免和抵消等策略以提升用户的服务质量。

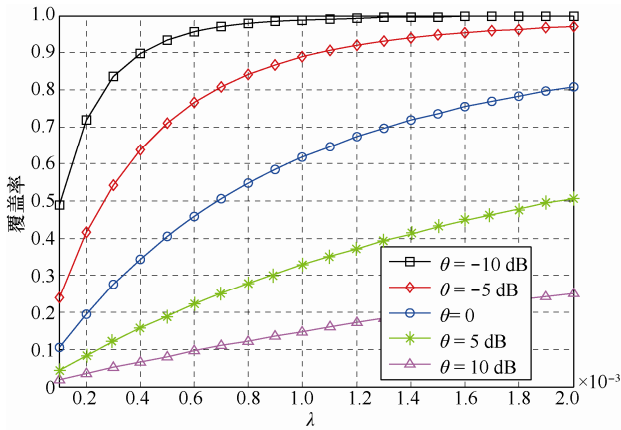


图 3 不同密度的覆盖率性能

覆盖率的渐近特性如图 4 所示，图 4 中给出了阵列大小与 Nakagami 信道衰减参数对覆盖率渐近特性的影响。从图 4 可以看出，覆盖率的上界与精确解的渐近特性一致，与理论分析一致，进而也验证了上界的有效性和精度。对于相同的信道衰减参数，不同阵列大小所对应的渐近曲线是互相平行的，阵列大小仅影响 $\log(1 - P(\theta))$ 的渐近水平偏移。例如，对于 $N = 8$ 与 $N = 64$ 两条曲线的渐近水平偏移为 8 dB 左右，因此可以得到 $P_{N=64}(\theta) \sim P_{N=8}(\theta - 8 \text{ dB})$ ，其中， θ 以 dB 形式进行计算。从图 4 中也可以看出，较大的 Nakagami 信道衰减参数会引入更大的渐近斜率，这说明覆盖率在 $\theta \rightarrow 0$ 时以更快的速率趋于 0。此外，相同的信道衰减参数使覆盖率的上下界具有固定的水平偏移，与阵列大小和具体的 SINR 阈值无关，而且该水平偏移随着信道衰减参数的增大而增大。

不同阵列模型的用户传输速率对比如图 5 所示，比较了 3 种天线阵列模型在不同阵列大小与基

站密度下的用户传输速率曲线。从图 5 可以看出，相比于多波瓣模型，所提的天线方向图模型与实际结果具有更好的匹配效果。用户传输速率随 SINR 阈值的增大，呈现先增大后减小的趋势，这是因为随着 SINR 阈值的增大，虽然覆盖率一开始会下降，但速率的对数项 $\log_2(1 + \theta)$ 迅速增加，从而导致用户速率提升。随着 SINR 阈值持续增大，覆盖率的下降趋势起主导作用，从而导致速率下降。这现象说明，选取合适的 SINR 阈值可以得到最大的用户速率，其中，该阈值代表了某种编码调制方式。从图 5 可得到最大速率对应的 SINR 阈值与阵列大小和基站密度相关。

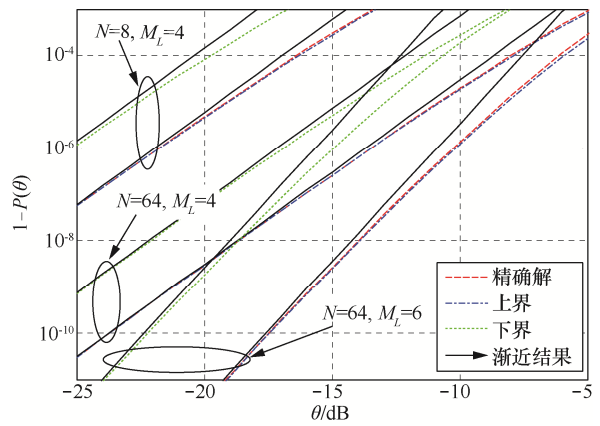


图 4 覆盖率的渐近特性

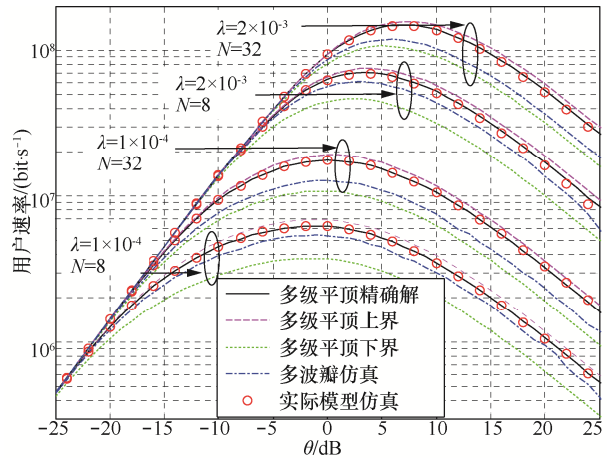


图 5 不同阵列模型的用户传输速率对比

不同密度下的用户传输速率性能如图 6 所示，图 6 中给出了采用多级平顶模型时不同基站密度对用户传输速率的影响。随着密度的增大，用户的传输速率也随之增大，增长的速率与所选取的 SINR 阈值有关。当 SINR 阈值为 -10 dB 时，在基站密度增长到一定值时，用户传输速率到达一个平台后不再增加；当 SINR 阈值为 5 dB 时，用户传输速率的

增长速率最快。此外，与覆盖率随密度变化的曲线相比，用户的传输速率在不同的密度范围中需要选择不同的 SINR 阈值才能达到最优用户速率。例如，在基站密度较小时，阈值为 0 可以得到用户最大传输速率，而在基站密度较大时，5 dB 阈值将达到用户最大传输速率。因此，基站密度与 SINR 阈值需要联合优化才能使用户速率最优。

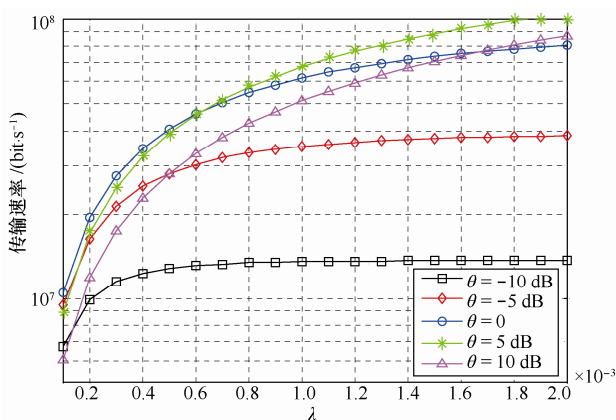


图 6 不同密度下的用户传输速率性能

5 结束语

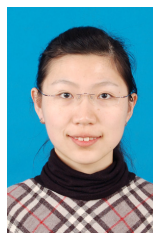
本文提出了一个简单且有效的多平顶模型以近似实际的阵列方向图，其中该方向图模型在可分析性以及近似精确度方面均具有强大的优势，从而适用于毫米波网络中的性能评估。基于该方向图，本文推导了毫米波蜂窝网络中用户覆盖率的精确理论表达式，并给出了对应的易于计算的上下界。通过渐近分析方法，理论证明了上界在 $\theta \rightarrow 0$ 时与精确理论具有一致的渐近性，从而验证了上界近似的有效性。同时，理论证明了下界与精确理论仅存在一个固定的横向偏移。基于覆盖率的分析，本文进一步给出用户传输速率的理论表达。仿真结果体现了所提模型在精确度、覆盖率和用户传输速率等方面可提供良好的近似，从而验证了所提模型的有效性，为后续评估毫米波网络的网络技术提供了一个有效的参考方法。

参考文献:

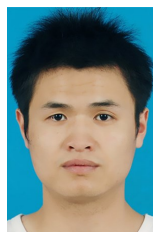
[1] BAI T, ALKHATEEB A, HEATH R W. Coverage and capacity of millimeter-wave cellular networks[J]. IEEE Communications Magazine, 2014, 52(9):70-77.
 [2] AKDENIZ M R, LIU Y, SAMIMI M K, et al. Millimeter wave channel modeling and cellular capacity evaluation[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2013, 32(6):1164-1179.

[3] RENZO M D. Stochastic geometry modeling and analysis of multi-tier millimeter wave cellular networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(9):5038-5057.
 [4] BAI T, HEATH R W. Coverage and rate analysis for millimeter-wave cellular networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(2):1100-1114.
 [5] ANDREWS J G, BAI T, KULKARNI M N, et al. Modeling and analyzing millimeter wave cellular systems[J]. IEEE Transactions on Communications, 2017, 65(1):403-430.
 [6] DENG N, HAENGGI M. A fine-grained analysis of millimeter-wave device-to-device networks[J]. IEEE Transactions on Communications, 2017, 65(11):4940-4954.
 [7] YU X, ZHANG J, HAENGGI M, et al. Coverage analysis for millimeter wave networks: the impact of directional antenna arrays[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2017, 35(7):1498-1512.
 [8] DENG N, HAENGGI M, SUN Y. Millimeter-wave device-to-device networks with heterogeneous antenna arrays[J]. IEEE Transactions on Communications, 2018, 66(9):4271-4285.
 [9] RENZO M D, LU W, GUAN P. The intensity matching approach: a tractable stochastic geometry approximation to system-level analysis of cellular networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2016, 15(9):5963-5983.
 [10] DENG N, HAENGGI M. A novel approximate antenna pattern for directional antenna arrays[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2018, 7(5):832-835.
 [11] SINGH S, KULKARNI M N, GHOSH A, et al. Tractable model for rate in self-backhauled millimeter wave cellular networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2014, 33(10):2196-2211.
 [12] HAENGGI M. On distances in uniformly random networks[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(10):3584-3586.
 [13] HAENGGI M. Stochastic geometry for wireless networks[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
 [14] ALZER H. On some inequalities for the incomplete gamma function[J]. Mathematics of Computation, 1997, 66(218):771-778.
 [15] HAENGGI M, JEFFREY G A, FRANCOIS B, et al. Stochastic geometry and random graphs for the analysis and design of wireless networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2009, 27(7):1029-1046.

[作者简介]



邓娜 (1988-), 女, 大连理工大学信息与通信工程学院讲师, 主要研究方向为通信网络理论与技术。



卫海超 (1989-), 男, 大连海事大学信息科学技术学院讲师, 主要研究方向为通信网络理论与技术。